La Houille Blanche, n° 2, 2015, p. 39-44 DOI 10.1051/lhb/20150017

Méthode des volumes finis et précision des modèles numériques des écoulements souterrains

Dalila LOUDYI[1], Roger FALCONER[2], Binliang LIN[3]

[1] *Faculté des Sciences et Techniques - Mohammedia, Maroc - e-mail: dalila.loudyi@univh2m.ma*
[2] *Cardiff School of Engineering, Cardiff, GB - e-mail: FalconerRA@cardiff.ac.uk*
[3] *Tsinghua University, Pékin, R.P.Chine - e-mail: linbl@tsinghua.edu.cn*

RÉSUMÉ. – La précision et la fiabilité des modèles numériques reposent sur la minimisation des erreurs et incertitudes. Dans la modélisation des eaux souterraines, il existe trois sources d'erreurs, à savoir les erreurs de conception, les erreurs numériques et les erreurs résultant des incertitudes ou insuffisances dans les données d'entrée. Ces erreurs peuvent se produire au niveau du développement du modèle ou de son application. La méthode des volumes finis présente plusieurs avantages numériques. La modélisation des eaux souterraines basée sur cette méthode implique l'approximation du gradient hydraulique à la surface des mailles. Un aperçu sur les différentes méthodes d'approximation du gradient sur la surface de la maille sera donné. Un modèle d'écoulement souterrain basée sur la méthode des volumes finis et de l'approximation du gradient par vecteurs décomposés sur la surface de la maille sera présenté. Les erreurs liées à la diffusion numérique et au maillage seront évaluées. Des tests numériques portant sur la précision du modèle dans la résolution des équations de diffusion et sa sensibilité à la taille, la non-orthogonalité et l'asymétrie des mailles seront présentés. Les résultats du modèle sont ensuite comparés avec les solutions analytiques et les solutions données par la méthode des différences finies. Les résultats montrent la robustesse de modèle développé et la précision de l'approximation du gradient utilisée sur des maillages asymétrique et non-orthogonaux.

Mots-clés : Approximation du gradient, Écoulement souterrain, Erreurs numériques, Volumes finis

Finite Volume Method and Accuracy of Groundwater Flow Models

ABSTRACT. – The accuracy and reliability of numerical models rely on the minimization of errors and uncertainties. In groundwater modelling there are three sources of errors, namely conceptual errors, numerical errors and errors resulting from uncertainties or lack of input data. These errors can occur during the model development or application. The finite volume method has several numerical advantages. Groundwater models based on this method involve the approximation of the hydraulic gradient at cell faces. An overview of different methods for approximating the gradient on a control volume face is given. A finite volume groundwater flow model based on flux approximation using decomposed vectors is presented. Errors related to numerical diffusion and the mesh are evaluated. Numerical tests on the model accuracy in solving diffusion equations and its sensitivity to the mesh size, non-orthogonality and skewness are presented. The model results are then compared with the analytical solutions and the finite difference solutions. The results show the robustness of the developed model and the accuracy of the selected gradient approximation on asymmetric and non-orthogonal grids.

Key-words: Gradient approximation, Groundwater flow, Numerical errors, Finite Volume

I. INTRODUCTION

La précision et la fiabilité des modèles numériques utilisés pour la solution des équations aux dérivées partielles reposent sur la minimisation des erreurs et incertitudes. Le terme de la diffusion, dans l'équation des écoulements souterrains est commun aux équations de la continuité régissant de nombreux processus physiques similaires tels que le transfert de chaleur, le magnétisme, la dynamique des gaz, etc., et a fait l'objet de plusieurs recherches [Hyman *et al.*, 2002]. Dans le présent travail, un modèle basé sur la méthode des volumes finis pour la résolution de l'équation de la diffusion des écoulements souterrains sera présenté, et sa précision évaluée. Les erreurs liées à la discrétisation spatiale dans les volumes finis seront particulièrement traitées. Le résultat d'estimation de l'erreur sera donné pour justifier le niveau de précision du modèle. Sa supériorité par rapport à un modèle basé sur la méthode des différences finies sera examinée par des tests numériques.

II. LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS À L'ÉQUATION DES ÉCOULEMENTS SOUTERRAINS

La méthode des volumes finis est basée sur l'intégration des équations gouvernant l'écoulement du fluide sur un volume de contrôle. Les caractéristiques les plus attrayantes de la méthode des volumes finis sont : 1) la solution résultante implique la conservation intégrale des quantités telles que la masse, le moment et l'énergie sur les volumes de contrôle. Par conséquent, ces quantités sont conservées sur tout le domaine de calcul, pour un certain nombre de nœuds, alors que dans la méthode des différences finies

Article published by SHF and available at http://www.shf-lhb.org or http://dx.doi.org/10.1051/lhb/20150017

le principe de la conservation est exprimé uniquement pour les volumes de contrôle infinitésimaux. La méthode des éléments finis ne conserve pas la masse à l'échelle locale dans certains schémas [Di Gimmarco *et al.*, 1996] ; 2) le maillage offre une plus grande flexibilité géométrique par rapport à la méthode des différences finies. En 2D, les volumes de contrôle peuvent être des polygones quelconques, structurées ou non-structurées.

II.1. Équation de l'écoulement souterrain

Dans un repère cartésien 2D, l'intégration de l'équation de la diffusion décrivant l'écoulement souterrain dans un milieu poreux sur un volume control et l'application du théorème de la divergence de Gauss donne :

$$\nabla \cdot (K \nabla h) + q = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\int_{\partial V} K \, \nabla h \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds + \int_V q \, dV = \int_V S_s \frac{\partial h}{\partial t} \, dV \qquad (1)$$

où K est le tenseur de la conductivité hydraulique du milieu poreux, LT^{-1} ; h est la hauteur piézométrique, L ; S_s est le coefficient d'emmagasinement spécifique, L^{-1} ; t est le temps, T ; q est le débit (entrant ou sortant) par unité de volume, T^{-1}, dV est le volume de l'élément considéré, ∂V est le contour de V, ds est la surface liée à ∂V et $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire de surface. En discrétisant l'équation (1) sur un volume de contrôle quadrilatéral, on obtient :

$$\sum_{f=1}^{4} \left((K \nabla h) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right)_f A_f + qV = S_s \frac{\partial h}{\partial t} V \qquad (2)$$

où f est l'indice de surface de la maille et A_f est la surface relative à f. Un des principaux problèmes à ce stade est l'approximation du terme de la diffusion. Son intégration sur le volume de contrôle nécessite l'estimation de la dérivée de h sur les surfaces de chaque maille.

II.2. Approximation du gradient sur la surface d'un volume de contrôle

La précision de la discrétisation dépend considérablement de l'ordre de l'approximation du flux à la surface des mailles [Turkel, 1986]. Par exemple, dans le modèle classique des écoulements souterrains MODFLOW basé sur la méthode des différences finies, le gradient est approximé en utilisant un schéma de différence arrière à deux nœuds. Ainsi, le gradient de h dans la direction de x, allant de la maille de P à celle de N (Fig.1a) est approchée par :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{S_{NP}} = \frac{h_N - h_P}{x_N - x_P} \qquad (3)$$

Dans la direction y, la dérivée est nulle car les mailles sont orthogonales. Dans le schéma des volumes finis, le calcul du gradient pour une face commune présente plus de complexité puisque l'orthogonalité du maillage n'est plus vérifiée (Fig.1b).

De nombreuses méthodes ont été proposées pour calculer le gradient le long d'une surface du volume de contrôle telles que la méthode d'éléments finis mixte à volume de control [Cai *et al.*, 1997 ; Ferguson, 1998], la méthode operateur support [Shashkov et Steinberg, 1996 ; Margolin *et al.*, 2000], l'approximation du flux par vecteurs décomposés [Turner et Ferguson, 1995 ; Croft, 1998] et les techniques d'interpolation directe à la surface [Wasantha Lal, 1998]. Dans la méthode de l'approximation du flux par vecteurs décomposés, le gradient dans un point de la surface est approximé en utilisant une technique d'interpolation telle que les fonctions radiales de base (RBF) ou reconstruction du gradient par la méthode améliorée des moindres carrés ILSGR [Jayantha et Turner, 2003]. Cette dernière technique présente un haut ordre de précision même sur un maillage grossier et est applicable même pour des milieux fortement anisotropes, où le tenseur K n'est pas nécessairement diagonal. Dans cette étude, un modèle basé sur cette technique a été élaboré et appelé ci-après le modèle GWFV.

II.3. Présentation du modèle GWFV

Le principe utilisé dans cette méthode a été présenté dans Loudyi *et al.*, [2007]. Il consiste à : 1) décomposer le flux en utilisant des vecteurs $\hat{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{v}$ de la figure 2, où $\hat{\mathbf{u}}$ est le vecteur unitaire de surface du volume de contrôle centré au nœud P et $\hat{\mathbf{u}}$ est un vecteur reliant P à un nœud adjacent N ; 2) introduire des corrections pour asymétrie des mailles en utilisant la méthode ILSGR.

Le terme de la diffusion dans l'équation (2) peut être écrit sous : $(K \nabla h) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \nabla h \cdot \mathbf{w}$ où $\mathbf{w} = K^T \hat{\mathbf{n}}$. Il est en suite décomposé comme suit :

$$\nabla h \cdot \mathbf{w} = \alpha \nabla h \cdot \mathbf{v} + \beta \nabla h \cdot \hat{\mathbf{u}} \qquad (4)$$

où les constantes α et β dépendent du tenseur K et de la géométrie des mailles. Cette décomposition est effectuée sur chaque surface de la maille. Afin de formuler explicitement

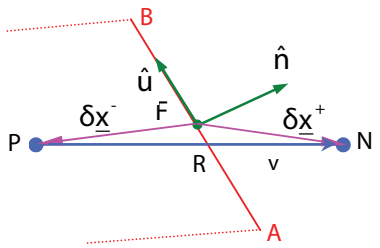

Figure 2 : *Surface représentative d'un volume de contrôle.*

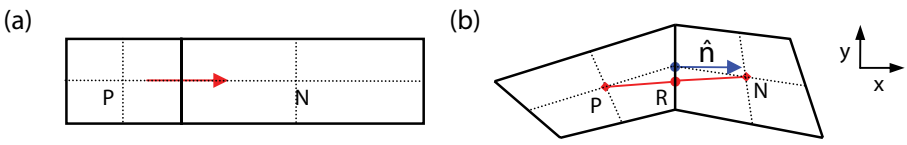

Figure 1 : *Deux mailles adjacentes centrées pour: (a) Méthode des différences finies, (b) Méthode des volumes finis.*

les termes de l'équation (4), le vecteur est aussi décomposé selon les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\hat{\mathbf{u}}$. L'équation (4) devient :

$$\nabla h \cdot \mathbf{w} = \frac{\mathrm{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\mathrm{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \nabla h \cdot \mathbf{v} + \left\{ \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right\} \nabla h \cdot \hat{\mathbf{u}} \qquad (5)$$

Afin de corriger les erreurs dues à l'asymétrie du maillage, le terme $\nabla h.\mathbf{v}$ est évalué au centre F de la surface du volume de contrôle au lieu du point R (Fig. 2) en utilisant le développement en série de Taylor de la fonction h, on obtient ainsi :

$$\begin{gathered} \left(\nabla h \cdot \mathbf{v}\right)_F \approx \left(h_N - h_P\right) - \varepsilon_{np} \text{ où} \\ \varepsilon_{np} \approx \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \left\{ \left(\delta \underline{\mathbf{x}}^{+} \cdot \nabla\right)^k - \left(\delta \underline{\mathbf{x}}^{-} \cdot \nabla\right)^k \right\} h(\underline{x}_F) \end{gathered} \qquad (6)$$

où m est l'ordre du développement en série de Taylor, $\delta \underline{\mathbf{x}}^{-}$ et $\delta \underline{\mathbf{x}}^{+}$ sont les vecteurs liant le centre F et les points nodaux P et N respectivement (Fig. 2). Dans le modèle GWFV, la précision a été arrêtée au second ordre. Ainsi, le terme de correction dans l'équation (6) devient :

$$\varepsilon_{np} \approx \frac{1}{2} \left\{ \left(\delta \underline{\mathbf{x}}^{+} \cdot \nabla\right)^2 - \left(\delta \underline{\mathbf{x}}^{-} \cdot \nabla\right)^2 \right\} h(\underline{x}_F) \qquad (7)$$

En remplaçant l'équation (6) dans l'équation (5) et en utilisant la formulation implicite, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\{ (K \nabla h) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right\}_F^{n+1} &= \frac{\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \left(h_N^{n+1} - h_P^{n+1} \right) + \left\{ \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right\} \left(\nabla h \cdot \hat{\mathbf{u}} \right)_F^{n+1} \\ &- \frac{\mathbf{w}.\hat{\mathbf{n}}}{\mathbf{v}.\hat{\mathbf{n}}} (\varepsilon_{np})_F^{n+1} \end{aligned} \qquad (8)$$

Les termes $\nabla h \cdot \hat{\mathbf{u}}$ et ε_{np} à la surface des volumes de contrôle ne sont pas encore connu au pas de temps $n + 1$. Ils sont évalués au nième pas de temps en utilisant la méthode ILSGR, où les valeurs de h aux nœuds N_d, reliés au point F, sont obtenues comme suit :

$$h\left(\underline{x}_F + \delta \underline{\mathbf{x}}_d\right) \approx \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(\delta \underline{\mathbf{x}}_d \cdot \nabla\right)^k h\left(\underline{x}_F\right) \qquad (9)$$

En écrivant l'équation (9) pour $m = 2$, et en choisissant un stencil de 9 mailles reliées au point F dans un maillage quadrilatéral structuré, un système d'équations avec une matrice d'ordre (9,6) a été généré. Après insertion des conditions aux limites, le système a été résolu en utilisant la décomposition LU.

III. PRÉCISION DU MODÈLE GWFV

L'utilisation de la règle du milieu de la surface dans la technique des volumes finis peut maintenir une précision du second ordre seulement si l'approximation du flux à la face du volume de contrôle est au moins du second ordre aussi [Murthy et Marthur, 1998]. L'approximation de la composante du gradient le long de la ligne reliant deux nœuds, utilisée à la fois dans la méthode des différences finies de MODFLOW, et dans la méthode des volumes finis exprimée dans l'équation (8), a une précision du premier ordre dans l'approximation par le développement de Taylor. L'erreur dans l'estimation du flux est principalement dominée par le rapprochement de ce terme.

Au niveau de l'équation (1), aucune approximation n'a été faite, et donc, elle est exacte [Turkel, 1986]. Dans les étapes suivantes, l'équation (2) ne peut être de second ordre, dans l'espace, que si l'approximation du flux au milieu de la surface du volume de contrôle est au moins du second ordre aussi [Jayantha et Turner, 2003].

III.1. Erreurs numériques dues à la discrétisation spatiale

III.1.1. Erreur due à la non-orthogonalité

La correction de la non-orthogonalité crée un problème de non-borne potentiel [Jasak, 1996]. L'erreur due à cette non-orthogonalité dans le modèle GWFV a la forme suivante :

$$E_d = \sum_f \beta_f \left(\nabla h \cdot \hat{\mathbf{u}} \right)_f A_f = \sum_f \left(\mathbf{\Gamma}_D \cdot \nabla h \right)_f \qquad (10)$$

où $\mathbf{\Gamma}_D = \beta\ \hat{\mathbf{u}}\ A$. Cette diffusion numérique dépend de l'angle de la non-orthogonalité de la maille.

III.1.2. Erreur due à l'asymétrie

Lorsque la ligne reliant deux nœuds adjacents ne passe pas par le milieu de la surface verticale entre ces nœuds alors une interpolation est nécessaire pour donner la valeur du paramètre au centre de la surface en fonction de sa valeur au point d'intersection. Par conséquent, la précision des intégrales sur la surface est réduite au premier ordre. Pour le modèle GWFV, cette erreur d'asymétrie a la forme :

$$E_S = \sum_f \alpha_f \varepsilon_f A_f \qquad (11)$$

L'amplitude de cette erreur dépend de l'importance de ε_f qui implique les vecteurs $\delta \underline{\mathbf{x}}^{-}$ et $\delta \underline{\mathbf{x}}^{+}$ donnés dans l'équation (6). Pour les mailles de qualité acceptable, la composante verticale de la différence entre les deux vecteurs est plus petite que la différence horizontale qui est égale à $\|v\|$. L'influence de ce terme est souvent plus petite que l'erreur due à la non-orthogonalité, sauf sur un maillage très déformé où elle peut avoir une influence significative.

IV. TESTS NUMÉRIQUES DU MODÈLE GWFV ET RÉSULTATS

Afin de tester la précision et la performance du modèle GWFV, les résultats de ce modèle sont comparés aux solutions analytiques existantes et les résultats du modèle numérique performant MODFLOW basé sur la méthode des différences finies.

IV.1. Test 1 : Erreur numérique - sensibilité à la taille des mailles

Le test présenté par Morel *et al.* [1992] a été utilisé pour démontrer la précision du modèle par rapport à la taille des

mailles pour un maillage aléatoire. Une surface carrée de 10 × 10 m a été utilisé pour simuler un écoulement bidimensionnel à travers un milieu poreux. Le domaine a été subdivisé en mailles quadrilatérales structurées pour cinq différents niveaux de discrétisation, comme le montre la figure 3.

Les conditions aux limites du domaine sont les suivantes :

$$\begin{cases} \Delta h = 0 \text{ dans } [0,10]\times[0,10] \\ h(x,0) = 0 \text{ m} \\ h(x,10) = 10 \text{ m} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial h}{\partial x}(10,y) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est $\bar{h}(x,y) = y$. La norme quadratique L_2 a été utilisée pour calculer l'erreur. Les résultats de simulation pour les différents maillages sont donnés dans le tableau 1. Le modèle GWFV présente des résultats encore mieux que ceux de MODFLOW sur le maillage orthogonal le plus dense. Cependant, sur des maillages non-orthogonaux, la précision du modèle est sensiblement inferieure, mais tend à augmenter quand le nombre de mailles se multiplie. A partir de ces résultats, on peut voir que l'erreur a été réduite par un facteur de minimum 2 à chaque fois que l'espacement des mailles a été réduit d'un facteur similaire, ce qui indique que la méthode a une précision de second ordre sur tous les maillages qui ont été utilisés.

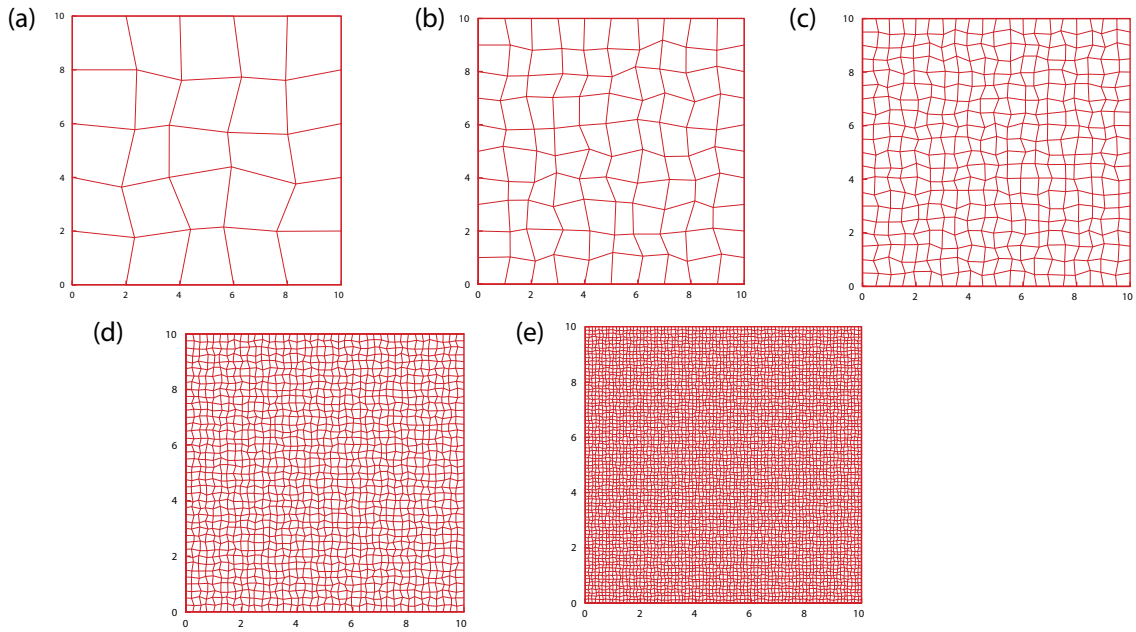

Figure 3 : *Test 1 : Maillage aléatoire, (a): 5 × 5 ; (b): 10 × 10 ; (c): 20 × 20 ; (d): 40 × 40 ; et (e): 80 × 80.*

Table 1 : Test 1: Erreurs sur le maillage aléatoire.

Modèle	Nombre de mailles	L_2	Erreur relative
Maillage orthogonal			
GWFV	5 x 5	12.3091 x 10^{-2}	
	10 x 10	5.5348 x 10^{-2}	2.22
	20 x 20	2.6292 x 10^{-2}	2.1
	40 x 40	1.2818 x 10^{-2}	2.05
	80 x 80	6.3456 x 10^{-3}	2.02
MODFLOW	5 x 5	12.3092 x 10^{-2}	
	10 x 10	5.5346 x 10^{-2}	2.22
	20 x 20	2.6291 x 10^{-2}	2.1
	40 x 40	1.2824 x 10^{-2}	2.05
	80 x 80	6.6505 x 10^{-3}	1.93
Maillage non-orthogonal			
GWFV	5 x 5	13.1917 x 10^{-2}	
	10 x 10	6.1586 x 10^{-2}	2.14
	20 x 20	2.8816 x 10^{-2}	2.14
	40 x 40	1.4000 x 10^{-2}	2.05
	80 x 80	6.7411 x 10^{-3}	2.07

IV.2. Test 2 : Erreur numérique - sensibilité à la non-orthogonalité et l'asymétrie

Un maillage non-orthogonal permet d'éliminer la contrainte de représenter les limites irrégulières du domaine physique avec des lignes de mailles perpendiculaires les unes aux autres. Pour tester cette nouvelle fonctionnalité dans le modèle proposé, le test Kershaw est utilisé [Kershaw, 1981]. Ce test permet d'évaluer la sensibilité du modèle à la forme de maillage, en particulier à la non-orthogonalité et l'asymétrie. Dans cet exemple, une maille Kershaw de 10 × 10 est utilisée (Fig.4a). Les mailles ont été dessinées de telle sorte que la forme des éléments varie du rectangle parfait au quadrilatère extrêmement asymétrique. La conductivité hydraulique de la zone est 300 m/j, des limites à potentiel imposé ont été assignées aux limites supérieure et inférieure, avec 1m et 0m respectivement, et des limites à flux nul au long des autres limites ont été imposées.

Les équipotentiels résultant de la simulation en régime permanent sur le maillage orthogonale de MODFLOW et celui de GWFV sont présentées respectivement dans les figures 4b et c. Les résultats du modèle GWFV montrent que les équipotentielles n'ont pas été altérées par la déformation du maillage. Le modèle GWFV montre une bonne indépendance par rapport à la forme des mailles avec des lignes droites.

La même simulation a été répétée avec un maillage de 20 × 20. Le maillage et les contours de h résultant de la simulation en régime permanent sont présentés dans la figure 5. Les équipotentiels restent linéaires même si le maillage est sévèrement asymétrique. Le modèle GWFV est moins sensible à la déformation du maillage et conserve une bonne précision.

V. CONCLUSIONS

L'analyse comparative des résultats des tests ont montré la robustesse du modèle GWFV. Les effets de la non - orthogonalité et l'asymétrie du maillage ont été minimisés par la formulation des volumes finis utilisée dans le modèle GWFV. Les paramètres associés à la hauteur piézométrique de chaque maille dans le système d'équations généré par le modèle GWFV comprennent moins de termes dépendant de la géométrie des mailles.

Les résultats précis obtenus à partir de ces tests en comparaison avec les solutions analytiques ont fourni une bonne indication de la justesse de ce nouveau modèle, mais ne sont pas suffisantes pour garantir que les résultats seront fiables pour des conditions aux limites plus complexes. La méthode des volumes finis ainsi développée avec un maillage quadrilatérale peut donner des résultats plus précis, avec une plus grande flexibilité au niveau de la simulation des conditions internes eu aux limites externes.

En régime transitoire, des tests supplémentaires liés à la stabilité et à la convergence de la nouvelle méthode doivent également être effectués, mais cela démontrera davantage l'efficacité des solveurs, plutôt que sur celles des changements numériques dans le nouveau modèle. Les performances des solveurs en termes de comportement de convergence, le temps et les besoins en mémoire sont liées aux nouvelles propriétés de la matrice résultante de la

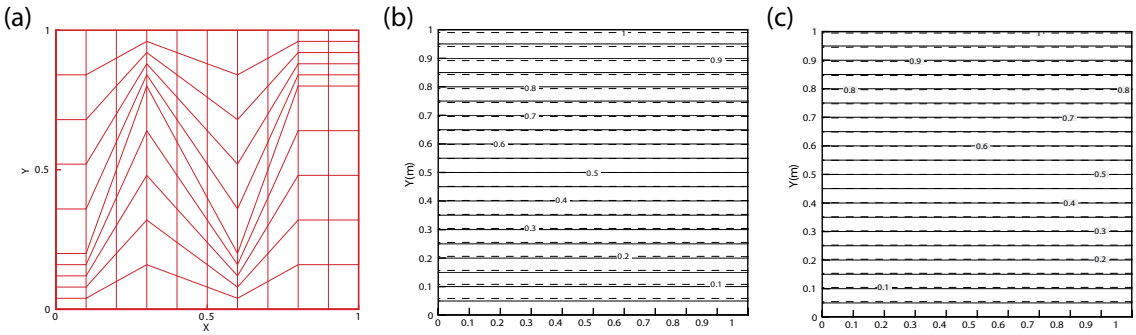

Figure 4 : *(a) Le maillage de Kershaw 10 × 10 ; (b) Équipotentiels --- MODFLOW, —— analytique ; (c) Équipotentiels --- GWFV, —— analytique.*

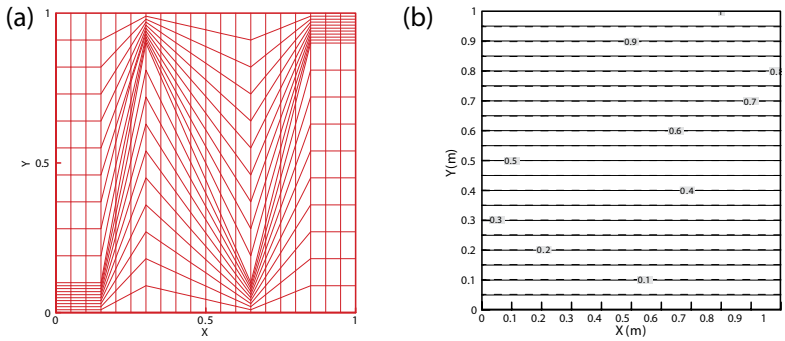

Figure 5 : *Test 2 (a) Le maillage 20 × 20 de Kershaw ; (b) Équipotentiels --- GWFV, —— analytique.*

discrétisation spatiale et temporelle. Le choix approprié des paramètres du solveur et les conditions initiales doivent être également étudiés.

VI. REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier Professeur François Avellan, Directeur du laboratoire des machines hydrauliques de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, pour avoir bien accepté la révision de cet article.

VII. REFERENCES

CAI Z., JONES J.E., MCCORMICK S.F., RUSSELL T.F. (1997) — Control-volume mixed finite element methods. *Computat. Geosci.* **1** : 289-315

CROFT T.N. (1998) — Unstructured mesh-finite volume algorithms for swirling, turbulent, reacting flows. Ph.D. Thesis, University of Greenwich

DI GIAMMARCO P., TODINI E., LAMBERTI P. (1996) — A conservative finite elements approach to overland flow: the control volume finite element formulation. *J. Hydrol.* **175** : 267-291

FERGUSON W.J. (1998) — The control volume finite element numerical solution technique applied to creep in Softwoods. *Int. J. Solids Struct.* **35(13)** : 1325-1338

HYMAN J., MOREL J., SHASHKOV M., STEINBERG S. (2002) — Mimetic finite difference methods for diffusion equations. *Computat. Geosci.* **6** : 333-352

JASAK H. (1996) — Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. PhD Thesis, Mechanical Engineering Department, Imperial College of Science, Technology and Medicine

JAYANTHA P.A., TURNER I.W. (2003) — A second order finite volume technique for simulating transport in anisotropic media. *Int. J. Numer. Method H.* **13(1)** : 31-56

KERSHAW D.S. (1981) — Differencing of the diffusion equation in Lagrangian hydrodynamic codes. *J. Comput. Phys.* **39** : 375-395

LOUDYI D., FALCONER R.A., LIN B. (2007) — Mathematical development and verification of non-orthogonal finite volume model for groundwater flow applications. *Adv. Water Resour.* **30** : 29-42

MARGOLIN L.G., SHASHKOV M., SMOLARKIEWICZ P.K. (2000) — A discrete operator calculus for finite difference approximations. *Comput. Method Appl. M.* **187(3-4)** : 365-383

MOREL J. E., DENDY JR., HALL M. L., WHITE S. W. (1992) — A cell-centered Lagrangian-mesh diffusion differencing scheme. *J. Comput. Phys.* **103(2)** : 286-299

MURTHY J.Y., MARTHUR S.R. (1998) — Computation of anisotropic conduction using unstructured meshes. *J. Heat Trans.* **120(3)** : 583-591

SHASHKOV M. J., STEINBERG S. (1996) — Solving diffusion equations with rough coefficients in rough grids. *J. Comput. Phys.* **129(2)** : 383-405

TURKEL E. (1986) — Accuracy of schemes with nonuniform meshes for compressible fluid flows. *Appl. Num. Math.* **2(6)** : 529-550

TURNER I.W., FERGUSON W.J. (1995) — An unstructured mesh cell-centered control volume method for simulating heat and mass transfer in porous media: application to Softwood drying, part I: the isotropic model. *Appl. Math. Modelling.* **19(11)** : 654-667

WASANTHA LAL A.M. (1998) — Weighted implicit finite-volume model for overland flow. *J. Hydraul. Eng.* **124(9)** : 941-950